МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к зачету.

1. Собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

Общий вид оператора Штурма-Лиувилля (Ш-Л)

$$L[y] := -\left(p(x)\cdot y'(x)\right)' + q(x)y(x),$$

здесь $p(x)$, $q(x)$ — некоторые (известные) функции (обычно предполагается, что функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют на $[a,b]$ неравенствам $p(x)\ge p_0$ (где p_0 — некоторое положительное число) и $q(x)\ge 0$).

Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении **ненулевых** функций $y(x)$, являющихся решениями уравнения

$$L[y] = \lambda\rho(x)y(x),$$

и удовлетворяющих граничным (краевым) условиям вида

$$A_1\cdot y(a) + B_1\cdot y'(a) = 0,$$
$$A_2\cdot y(b) + B_2\cdot y'(b) = 0,$$

а также о нахождении значений параметра λ (называемых собственными числами задачи Штурма-Лиувилля), при которых существуют указанные решения $y(x)$ (называемые собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля).

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2 — некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам $A_1^2 + B_1^2 \ne 0,\ A_2^2 + B_2^2 \ne 0$, а $\rho(x)$ — некоторая (известная) функция, удовлетворяющая на отрезке $[a,b]$ неравенству $\rho(x) > 0$.

Решение некоторых видов уравнений математической физики методом Фурье приводит к частному случаю задачи Ш-Л:

$$y(x)'' + \lambda y(x) = 0;\ \ x\in[a,b].$$

При этом граничные условия, например, могут быть такими: $y(a) = y(b) = 0$.

2. Виды краевых (граничных) условий для задачи Штурма-Лиувилля (Дирихле / Неймана / смешанные, однородные / неоднородные).

Краевые условия Дирихле

(заданы значения искомой функции на концах отрезка):

$$y(a) = A;\ \ y(b) = B,$$

где A, B — известные числа.

Краевые условия Неймана

(заданы значения производной искомой функции на концах отрезка):

$$y'(a) = A;\ \ y'(b) = B,$$

где A, B — известные числа.

Смешанные краевые условия

(на одном конце задано значение искомой функции, а на другом — значение её производной):

$$y(a) = A;\ \ y'(b) = B$$

или

$$y'(a) = A;\ \ y(b) = B,$$

где A, B — известные числа.

Вышеприведенные краевые (граничные) условия называются однородными, если и $A = 0$, и $B = 0$. Условия называются неоднородными, если хотя бы одно из чисел A, B не равно нулю.

3. Ортогональные системы функций. Обобщенные коэффициенты Фурье.

Рассматриваем множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Вводим скалярное произведение с весом $\rho(x)$ (предполагается, что $\rho(x) > 0$ на $[a,b]$):

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

Система функций $\{u_n(x)\}$ называется ортогональной относительно скалярного произведения, если $(u_n, u_m) = 0$ при любых $n \ne m$.

Обобщенные коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{u_n(x)\}$:

$$a_n := \frac{(f,u_n)}{(u_n,u_n)}.$$

4. Нормированность и ортонормированность системы функций.

Система функций $\{u_n(x)\}$ называется нормированной относительно скалярного произведения, если для любого n выполнено равенство $(u_n, u_n) = 1$.

Система функций $\{u_n(x)\}$ называется ортонормированной, если она ортогональная и нормированная.

5. Теорема Стеклова.

Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f\in C^2[a,b]$, обращающаяся в нуль на концах отрезка, представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе $\{u_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x) \ ;$$

$$\text{где } f_n := \int_a^b f(x) u_n(x) \rho(x) dx.$$

6. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа.

Уравнение колебаний струны

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (другая форма записи $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$).

Уравнение теплопроводности (для одномерного стержня при отсутствии тепловых источников)

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (другая форма записи $u'_t = a^2 u''_{xx}$).

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ или кратко } \quad \Delta u = 0.$$

Здесь a − некоторое число (разное в разных уравнениях, НЕ конец отрезка $[a,b]$), $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ − оператор Лапласа.

7. Общий принцип метода Фурье решения уравнения в частных производных (УЧП).

Ищем решение уравнения в частных производных в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$, с учетом краевых условий.

Решения имеют вид $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, где X_n–соответствующие собственные функции задачи ШЛ.

Решение УЧП ищем в виде линейной комбинации

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x,t)\,.$$

подбирая коэффициенты с учетом начальных условий.

8. Уравнение Бесселя, его применение для решения УЧП. Функции Бесселя, функции Неймана.

Уравнением Бе́сселя порядка ν называется уравнение вида

$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

где $\nu > 0$ — произвольное вещественное число.

Возникает при решении УЧП при переходе в уравнении Лапласа к цилиндрическим координатам.

Функции Бесселя $J_\nu(x)$ (функции Бесселя первого рода порядка ν) — решения уравнения Бесселя порядка ν, ограниченные в 0.

Функции Неймана $N_\nu(x)$ (функции Бесселя второго рода порядка ν) — решения уравнения Бесселя, неограниченные в 0.

При любом $\nu > 0$ функция $J_\nu(x)$ и функция $N_\nu(x)$ линейно независимы (см. математику 4).

Следовательно, произвольное решение $y_\nu(x)$ уравнения Бесселя порядка ν можно представить в виде

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu + C_2 N_\nu\,.$$

9. Сферические функции. Сферические функции являются собственными функциями оператора Лапласа в сферической системе координат (обозначение $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$). Они образуют ортонормированную систему в пространстве функций на двумерной сфере.

10. УЧП гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Рассмотрим УЧП

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + f(x,y,u,u'_x,u'_y) = 0.$$

Пусть $D = B^2 - AC$.

При $D > 0$ УЧП относится гиперболическому типу,

при $D = 0$ - к параболическому типу,

при $D < 0$ - к эллиптическому типу.

11. Формула Даламбера решения волнового уравнения.

Общее решение волнового уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ может быть записано в виде

$u(x,t) = F_1(x - at) + F_2(x + at)$

где $F_1,\ F_2$ − произвольные функции.